# Chapitre II: Techniques de calcul d'intégrales

Mohamed CH-Chaoui
Department de Mathématiques, FP Khouribga.
Email: mohamed.chchaoui@gmail.com

18 avril 2020

## Table des matières



## 1 Primitive et intégrale d'une fonction continue

### 1.1 Intégrale indéfinie

**Définition 1.1.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle primitive de $f$ s'il existe, toute fonction $F$ définie sur $I$ telle que*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

**Proprété 1.** *Si $G$ est une primitive de $f$, alors*

$$\forall x \in I, \qquad G(x) = F(x) + C, \quad C \text{ est une constante.}$$

**Définition 1.2.** *(Intégrale indéfinie)*
*On note $\int f(t)dt = F(t) + C$ pour signifier que $F$ est primitive de $f$. On dit que $\int f(t)dt$ est l'intégrale indéfinie de $f$.*

**Théorème 1.** *(Théorème fondamental de l'analyse)*
*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $\mathbb{I}$. Soit $a \in \mathbb{I}$ alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{I}$ et est la seule primitive de $f$ qui s'annule en $a$. $F' = f$ et $F(a) = 0$*

**Théorème 2.** *(Existence)*
*Toute fonction continue sur un intervalle $\mathbb{I}$ admet une primitive sur cet intervalle.*

**Corollaire 1.** *(Calcul d'intégrale)*
*Soit $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur le segment $[a, b] \subset \mathbb{I}$. Soit $G$ une primitive de $f$ sur $[a, b]$ alors l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ est donnée par*

$$\int_a^b f(t)dt = [G(t)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Preuve Comme la fonction $f$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{I}$, elle admet comme primitive sur $\mathbb{I}$ la fonction $F$ du théorème fondamental. Soit $G$ une primitive quelconque de $f$ sur $\mathbb{I}$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$. Par conséquent

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [G(b) + c] - [G(a) + c] = G(b) - G(a)$$

□

**Théorème 3.** *Théorème fondamental de l'analyse (deuxième forme)*
*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $\mathbb{I}$ de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{I}$. On a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

$f'$ est continue et est donc bien intégrable sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{I}$. De plus $f$ est une primitive de $f'$ sur $\mathbb{I}$. Appliquant le résultat précédent. □

## 1.2 Primitives des fonctions usuelles

| Fonction | Domaine de définition | Primitive |
|---|---|---|
| $x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{-1\}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $\mathbb{R}^{*+}$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\ln(\|x\|)$ |
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $-\cos x + C$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\sin x + C$ |
| $\tan x$ | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ | $\ln(\|\cos x\|) + C$ |
| $\dfrac{1}{\cos x^2}$ | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ | $\tan x + C$ |
| $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x + C$ |
| $\sinh x$ | $\mathbb{R}$ | $\cosh x + C$ |
| $\cosh x$ | $\mathbb{R}$ | $\sinh x + C$ |
| $\dfrac{1}{\cosh x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $\tanh x + C$ |
| $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1, 1[$ | $\arccos x + C$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1, 1[$ | $\arcsin x + C$ |
| $\dfrac{1}{x^2+1}$ | $\mathbb{R}$ | $\arctan x + C$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $]-\infty, -1[$ | $\ln \|x + \sqrt{x^2-1}\| + C$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $]-1, +\infty[$ | $\arg\cosh x = \ln \|x + \sqrt{x^2-1}\| + C$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\mathbb{R}$ | $\arg\sinh x + C$ |
| $\dfrac{1}{1-x^2}$ | $]-1, 1[$ | $\arg\tanh x + C$ |

### 1.3 Calcul de primitives et d'intégrales

**Théorème 4.** *(Intégration par parties). Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*
- $\displaystyle\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
- *Si $I = [a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

**Preuve**.
Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{I}$, la fonction $fg$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{I}$. On a donc

$$(fg)(a) - (fg)(b) = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b (f'g)(x) + (fg')(x)dx = \int_a^b (f'g)(x)dx + \int_a^b (fg')(x)dx$$

**Remarque 1.1.** *Pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b h(x)dx$, il suffit d'écrire la fonction sous la forme $h(x) = f(x)g'(x)$.*

**Théorème 5.** *(Changement de variable) Soit $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{J} \longrightarrow \mathbb{I}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictment monotone.*
- *Si $F$ est une primitive de $f$ alors*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

- *Si $\mathbb{I} = [a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

*On dit qu'on a realisé le changement de variable $x = \varphi(t)$*

*Démonstration.*
Comme $\varphi$ est continue sur $\mathbb{J}$ et strictment monotone (croissante), elle est bijective sur $\mathbb{J}$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{J}$ tel que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = (F \circ \varphi)(\beta)) - (F \circ \varphi)(\alpha))$$

Par ailleurs, $(F \circ \varphi)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée d'applications de classes $\mathcal{C}^1$, donc

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(t)dt = \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

□

## 2 Méthodes élémentaires pour le calcul de primitives

### 2.1 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

**Théorème 6.** *Toute fraction rationnelle $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, où $R(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes tels que $degR < degQ$, s'écrit d'une et une seule façon comme somme d'éléments simples.*

Soit
$$Q(x) = cA_1(x)\dots A_p(x)B_1(x)\dots B_q(x)$$
la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ avec $c$ une constante et, pour tout $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$,
$$A_i(x) = (x - a_i)^{n_i} \quad \text{et} \quad B_j(x) = (x^2 + b_j x + c_j)^{m_j} \text{ où } b_j^2 - 4c_j < 0.$$
Alors
$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{Q(x)} &= \sum_{i=1}^{p} F_i + \sum_{j=1}^{q} G_j, \\
F_i &= \sum_{k=1}^{n^i} \frac{\alpha_i}{(x-a_i)^k}, \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p), \\
G_j &= \sum_{k=1}^{m^j} \frac{\beta_j x + \gamma_j}{(x^2 + b_j x + c_j)^k}, \quad (\beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, q).
\end{aligned}$$

## 2.2 Calcul des primitives

1. **Calcul de** $\displaystyle\int \frac{\alpha}{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{k}}}\mathbf{dx}$
   — Si $k = 1$ alors
   $$\int \frac{\alpha}{(x-a)}dx = \alpha \ln|x-a| + C.$$
   — Si $k > 1$ alors
   $$\int \frac{\alpha}{(x-a)^k}dx = \frac{\alpha}{(1-k)}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$
2. **Calcul de** $\displaystyle\int \frac{\beta\mathbf{x} + \gamma}{(\mathbf{x^2} + \mathbf{bx} + \mathbf{c})^{\mathbf{k}}}$.
   Pour commencer, on le décompose sous la forme
   $$\int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2+bx+c)^k}dx = \frac{\beta}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}dx + (\gamma - \frac{b\beta}{2})\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx.$$
   (a) **Calcul de** $\displaystyle\int \frac{\mathbf{2x+b}}{(\mathbf{x^2+bx+c})^{\mathbf{k}}}\mathbf{dx}$.
   — Si $k = 1$ alors
   $$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)} = \ln(x^2+bx+c) + C.$$
   — Si $k > 1$ alors
   $$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}dx = \frac{1}{(1-k)}\frac{1}{(x^2+bx+c)^{k-1}} + C.$$
   (b) **Calcul de** $\displaystyle\int \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{x^2+bx+c})^{\mathbf{k}}}$.
   On a $b^2 - 4c < 0$, alors
   $$\begin{aligned}
   x^2+bx+c &= (x + \frac{1}{2}b)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2 \\
   &= (x+a)^2 + \delta^2 \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{2}b, \delta^2 = \left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2.
   \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{1}{((x+a)^2+\delta^2)^k}dx = \frac{1}{\delta^{2k}} \int \frac{1}{((\frac{x+a}{\delta})^2+1)^k}dx.$$

On fait le changement de variable $u = \frac{x+a}{\delta}$ et on obtient

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx = \frac{1}{\delta^{2k-1}} \int \frac{1}{(u^2+1)^k}du.$$

— Si $k = 1$ alors

$$\int \frac{1}{(u^2+1)}dx = \arctan u + C.$$

— Si $k > 1$ soit

$$I_k(x) = \int \frac{1}{(u^2+1)^k}du.$$

En utilisant une intégration par parties, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$I_{k+1}(x) = \frac{1}{2k}\left[(2k-1)I_k(x) + \frac{x}{(1+x^2)^k}\right] \tag{2.1}$$

et les termes d'ordre supérieur s'obtiennent par récurrence.

$$I_2(x) = \int \frac{1}{(u^2+1)^2}du = \frac{1}{2}\left[\arctan x + \frac{x}{(1+x^2)}\right] + C$$

$$I_3(x) = \int \frac{1}{(u^2+1)^3}du = \frac{3}{8}\left[\arctan x + \frac{x}{(1+x^2)}\right] + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + C$$

**Exemple - Nous allons calculer l'intégrale**

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4-16}dx.$$

**Effectuons d'abord la décomposition en éléments simples de $\frac{x}{x^4-16}$. On a**

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2+4}.$$

**En multipliant les deux membres de cette égalité par $x-2$ et en faisant $x=2$, on obtient**

$$a = \frac{2}{(2+2)(4+4)} = \frac{1}{16}.$$

**De la même manière, on obtient $b = \frac{1}{16}$. Puisque la fraction rationnelle est impaire on déduit que $d = 0$. Pour calculer $c$, on prend $x = 1$ et on obtient**

$$-\frac{1}{15} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} + \frac{c}{5}$$

**et donc $c = -\frac{1}{8}$. Ainsi**

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{x}{x^2+4}\right)$$

**et donc**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x^4-16}dx &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\left[\ln|x-2|\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln|x+2|\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+4)\right]_0^1\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(-\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 - \ln 5 + 2\ln 2\right) = \frac{1}{16}\ln\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

## 2.3 Intégrales de types $I = \int F\left(x, x^{\frac{m}{n}}; x^{\frac{p}{q}}; ....; x^{\frac{r}{s}}\right)dx$

Pour calculer ces intégrales, on pose le changement de variable

$$x = t^k$$

où $k$ est le dénominateur commun de $\frac{m}{n}; \frac{p}{q}; ....; \frac{r}{s}$.

$$dx = kt^{k-1}dt$$

donc

$$I = \int R(t)dt$$

où $R(t)$ est une fraction rationnelle.

**Exemple - Nous allons calculer l'intégrale**

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1}dx.$$

**on a**

$$R(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1}$$

**On effectue le changement de variable $x = t^4$, alors on a**

$$I = \int \frac{t^2}{t^3+1}4t^3dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt.$$

**Or**

$$\frac{t^5}{t^3+1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3+1} = t^2 - \frac{1}{3}\frac{3t^2}{t^3+1}.$$

**On déduit alors que**

$$I = 4\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\ln|t^3+1|\right) + C = 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{3}\ln|\sqrt[4]{x^3}+1|\right) + C.$$

## 2.4 Intégrales de types $I = \int F\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx$

Pour calculer ces intégrales, on pose le changement de variable

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

et on calcule $x$ en fonction de $t$.

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}.$$

Ainsi

$$dx = \frac{ndt^{n-1}(a-ct^n) + nct^{n-1}(dt^n - b)}{(a-ct^n)^2}dt.$$

On déduit alors que

$$I = \int R(t)dt$$

où $R(t)$ est une fraction rationnelle.
**Exemple - Nous allons calculer l'intégrale**

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

**On effectue le changement de variable $x + 4 = t^2$. On déduit alors que**

$$dx = 2tdt.$$

**Ainsi**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= \int_2^{\sqrt{5}} \frac{2t^2}{t^2-4} dt \\
&= 2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{t^2-4+4}{t^2-4} dt \\
&= 2\int_2^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt \\
&= 2\int_2^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt \\
&= 2\left[t + \ln|t-2| - \ln|t+2|\right]_2^{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

### 2.5 Intégrales de types $\int \cos^n x \sin^m x dx$ ou $\int \cosh^n x \sinh^m x dx$

Pour calculer ces intégrales on distingue trois cas :

1. Si $n = 2p+1$. On effectue le changement de variable $t = \sin x$, alors on a

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2p+1} x \sin^m x dx &= \int (\cos^2 x)^p \sin^m x \cos x dx \\
&= \int (1 - \sin^2 x)^p \sin^m x \cos x dx \\
&= \int (1-t^2)^p t^m dt
\end{aligned}$$

de même on fait le changement de variable $t = \sinh x$, on a

$$\begin{aligned}
\int \cosh^{2p+1} x \sinh^m x dx &= \int (\cosh^2 x)^p \sinh^m x \cosh x dx \\
&= \int (1 + \sinh^2 x)^p \sinh^m x \cosh x dx \\
&= \int (1+t^2)^p t^m dt.
\end{aligned}$$

2. Si $m = 2p+1$. On effectue le changement de variable $t = \cos x$, alors on a

$$\begin{aligned}
\int \sin^{2p+1} x \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^p \cos^n x \sin x dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x \sin x dx \\
&= -\int (1-t^2)^p t^n dt
\end{aligned}$$

de même on fait le changement de variable $t = \cosh x$ alors on a

$$\begin{aligned}\int \sinh^{2p+1} x \cosh^n x dx &= \int (\sinh^2 x)^p \cosh^n x \sinh x dx \\ &= \int (\cosh^2 x - 1)^p \cosh^n x \sinh x dx \\ &= \int (t^2 - 1)^p t^n dt.\end{aligned}$$

3. Si $n$ et $m$ sont paires on utilise les formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath},$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2},$$

et pour calculer $\cos^n x$ et $\sin^m x$ on utilise la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^k b^{n-k}. \tag{2.2}$$

**Exemple - Nous allons calculer**

$$\int \sin^6 x dx, \quad \int \sinh^6 x dx.$$

**En utilisant la formule du binôme et la formule d'Euler, on obtient**

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x dx &= -\frac{1}{64} \int \left(e^{\imath x} - e^{-\imath x}\right)^6 dx \\ &= -\frac{1}{64} \int \left((e^{-6\imath x} + e^{6\imath x}) - 6(e^{-4\imath x} + e^{4\imath x}) + 15(e^{-2\imath x} + e^{2\imath x}) - 20\right) dx \\ &= -\frac{1}{32} \int (\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10)\, dx \\ &= -\frac{1}{192} \sin 6x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{15}{64} \sin 2x + \frac{5}{16} x + C\end{aligned}$$

**Le même calcul que précédemment, on trouve**

$$\int \sinh^6 x dx = -\frac{1}{192} \sinh 6x + \frac{3}{64} \sinh 4x - \frac{15}{64} \sinh 2x + \frac{5}{16} x + C$$

## 2.6 Intégrales de types $\int F(\cos x, \sin x) dx$ ou $\int F(\cosh x, \sinh x) dx$

Pour calculer ces intégrales, on sait que $\cosh x = \cos \imath x$ et $\sinh x = \sin \imath x$, donc il suffit d'étudier l'expression $f(x) = F(\cos x, \sin x)dx$ en utilisant **les règles de Bioche** suivantes :

1. Si $f(\pi - x) = f(x)$, on effectue le changement de variable $t = \sin x$ ou on effectue le changement de variable $u = \sinh x$.
2. Si $f(-x) = f(x)$, on effectue le changement de variable $t = \cos x$ ou on effectue le changement de variable $u = \cosh x$.
3. Si $f(x + \pi) = f(x)$, on effectue le changement de variable $t = \tan x$ ou on effectue le changement de variable $u = \tanh x$.

4. Si aucun des cas ci-dessus n'est vérifié, on effectue le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ et on utilise les formules

$$dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{2.3}$$

ou on effectue le changement de variable $u = \tanh \frac{x}{2}$ et on utilise les formules

$$du = \frac{1}{2}(1-u^2)dx, \quad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{2u}{1-u^2}. \tag{2.4}$$

**Exemples -**

**1.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x}.$$

**On remarque que**

$$\frac{\cos(\pi - x)d(\pi - x)}{1+\sin(\pi - x)} = \frac{\cos x dx}{1+\sin x},$$

**puisque** $d(\pi - x) = -dx$**,** $\cos(\pi - x) = -\cos x$ **et** $\sin(\pi - x) = \sin x$**. On effectue le changement de variable** $t = \sin x$**. On a** $dt = \cos x dx$ **et donc**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln 2.$$

**2. Nous allons calculer**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x}.$$

**On remarque que**

$$\frac{\sin(-x)d(-x)}{\cos(-x) + (\sin(-x))^2} = \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x},$$

**puisque** $d(-x) = -dx$**,** $\sin(-x) = -\sin x$ **et** $\cos(-x) = \cos x$**. On effectue alors le changement de variable** $t = \cos x$ **et donc** $dt = -\sin x dx$**. On obtient alors**

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x} &= -\int_1^0 \frac{dt}{t+1-t^2} = -\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t-1} \\ &= -\int_0^1 \frac{dt}{(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}.\end{aligned}$$

**Or**

$$\frac{1}{(t - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(t - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{t - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right).$$

**On déduit alors que**

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x} &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\ln\left|\frac{t - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{t - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right|\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).\end{aligned}$$

**Exercices - En utilisant un changement de variables convenable, calculer les intégrales suivantes**

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}, \qquad (2) \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x dx}{2+\sinh x}, \qquad (3) \int_0^1 \frac{dx}{1+\cosh x}$$

**Corrigés -**

1. **On remarque que**
$$\frac{\sin(x+\pi)d(x+\pi)}{\cos(x+\pi)+\sin(x+\pi)} = \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x},$$
**puisque** $\sin(x+\pi) = -\sin x$**,** $\cos(x+\pi) = -\cos x$ **et** $d(\pi + x) = dx$**. On fait alors le changement de variable** $u = \tan x$**. On a** $du = (1+u^2)dx$ **et**
$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x(1+\tan x)} = \frac{u}{1+u}$$
**et donc**
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x} = \int_0^1 \frac{u du}{(1+u)(1+u^2)}.$$
**Or la décomposition en éléments simples de** $\frac{u}{(1+u)(1+u^2)}$ **est donnée par**
$$\frac{u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u}\right).$$
**On déduit que**
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x} &= \frac{1}{4}\left[\ln(1+u^2)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\arctan u\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln|1+u|\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$
2. **On remarque que**
$$\frac{\cos(\pi - x)d(\pi - x)}{2+\sin(\pi - x)} = \frac{\cos x dx}{1+\sin x},$$
**puisque** $d(\pi - x) = -dx$**,** $\cos(\pi - x) = -\cos x$ **et** $\sin(\pi - x) = \sin x$**. On fait le changement de variable** $u = \sinh x$**. On a** $du = \cosh x dx$ **et donc**
$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x dx}{2+\sinh x} = \int_0^1 \frac{du}{2+u} = \left[\ln|2+u|\right]_0^1 = \ln\frac{3}{2}.$$
3. **On remarque qu'aucune des trois règles de Bioche n'est valable dans ce cas. On pose alors** $u = \tanh\frac{x}{2}$**. On a**
$$du = \frac{1}{2}(1-u^2)dx \quad \textbf{et} \quad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$
**et donc**
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\cosh x} = \int_0^{\tanh(\frac{1}{2})} du = \tanh(\frac{1}{2}).$$

## 2.7 Calcul des intégrales de type $\int F(x, \sqrt{x^2+bx+c})$

Pour calculer ces intégrales, on écrit alors
$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$
si on pose
$$X = x + \frac{b}{2}, \quad \text{et} \quad \Delta = b^2 - 4c$$
on a alors
$$x^2+bx+c = X^2 - \frac{1}{4}\Delta$$
ainsi on distingue plusieurs cas :

1. Si $\Delta = b^2 - 4c = 0$. Dans ce cas, $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2$ et on se ramène à calculer la primitive d'une fraction rationnelle en $x$.
2. Si $\Delta = b^2 - 4c < 0$. Alors

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \alpha^2 = X^2 + \alpha^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta},$$

   et on se ramène à calculer $\displaystyle\int R(x, \sqrt{X^2 + \alpha^2})$. On effectue alors le changement de variable

$$\alpha \sinh t = X = x + \frac{b}{2}$$

   et ainsi

$$\sqrt{x^2 + bx + c} = \alpha \cosh t.$$

   On est alors ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\cosh t$ et $\sinh t$.
3. Si $\Delta = b^2 - 4c > 0$. Alors

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \alpha^2 = X^2 + \alpha^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta},$$

   et on se ramène à calculer $\int R(x, \sqrt{X^2 - \alpha^2})$. On effectue alors le changement de variable

$$\alpha \cosh t = X = x + \frac{b}{2}$$

   et ainsi

$$\sqrt{x^2 + bx + c} = \alpha \sinh t.$$

   On est alors ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\cosh t$ et $\sinh t$.
4. Si on se ramène à calculer des intégrales de type $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - X^2})$ On effectue alors le changement de variable

$$\alpha \sin t = X$$

   et ainsi

$$\sqrt{\alpha^2 - X^2} = \alpha |\cos t|.$$

   On est alors ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$.

**Exercice - Calculer**

**1.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + 2x^2}\, dx$

**2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}\, dx$

**3.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-x^2 + x + 1}\, dx$

***Corrigé***

**1. On pose** $\sinh t = \sqrt{2}x$ **et donc** $\sqrt{2}dx = \cosh t dt$**. Pour** $x = 0$**, on** $t = \arg\sinh(0) = 0$ **et pour** $x = 1$**,** $t = \arg\sinh(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ **car on a**

$$\arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}). \tag{2.5}$$

**Ainsi**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+2x^2}\,dx &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t dt\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \cosh^2 t dt\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})} (1+\cosh(2t))dt\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})) + \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\sinh(2t)\right]_0^{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})) + \frac{\sqrt{2}}{8}\sinh\left(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\right).
\end{aligned}$$

**Or**

$$\begin{aligned}
\sinh\left(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\right) &= \sinh(\ln(5+2\sqrt{6}))\\
&= \frac{1}{2}\left((5+2\sqrt{6})) - \frac{1}{(5+2\sqrt{6}))}\right)\\
&= \frac{24+10\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

**Finalement**

$$\int_0^1 \sqrt{1+2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**2. On a**

$$\sqrt{x^2+2x+5} = \sqrt{(x+1)^2+4} = 2\sqrt{(\frac{1}{2}(x+1))^2+1}.$$

**Ainsi on pose** $2\sinh t = 1+x$ **et donc** $dx = 2\cosh t dt$**. Pour** $x=0$**, on** $t = \arg\sinh(\frac{1}{2})$ **et pour** $x=1$**,** $t = \arg\sinh(1)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx &= \left[\arg\sinh(\frac{1}{2}(x+1))\right]_0^1\\
&= \arg\sinh(1) - \arg\sinh\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

**Or**

$$\arg\sinh x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \tag{2.6}$$

**et finalement**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1+\sqrt{5}) + \ln 2.$$

**3. On a**

$$\sqrt{-x^2+x+1} = \sqrt{-(x^2-x-1)} = \sqrt{-\left((x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}.$$

**Ainsi on pose $\frac{\sqrt{5}}{2}\sin t = x - \frac{1}{2}$ et donc $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t dt$.**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{-x^2+x+1}\,dx &= \frac{5}{4}\int_{-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}} |\cos t|\cos t dt \\
&= \frac{5}{4}\int_{-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})} \cos^2 t dt \\
&= \frac{5}{8}\int_{-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})} (1+\cos 2t)\,dt \\
&= \frac{5}{4}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{5}{16}\left[\sin(2t)\right]_{-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})} \\
&= \frac{5}{4}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{5}{8}\sin\left(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})\right).
\end{aligned}$$

**Or**

$$\begin{aligned}
\sin\left(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})\right) &= 2\sin\left(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})\right)\cos\left(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})\right) \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

**car**

$$\forall x \in [-1,1] \quad \cos\left(\arcsin(x)\right) = \sqrt{1-x^2}$$

**d'où**

$$\int_0^1 \sqrt{-x^2+x+1}\,dx = \frac{5}{4}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{1}{2}.$$